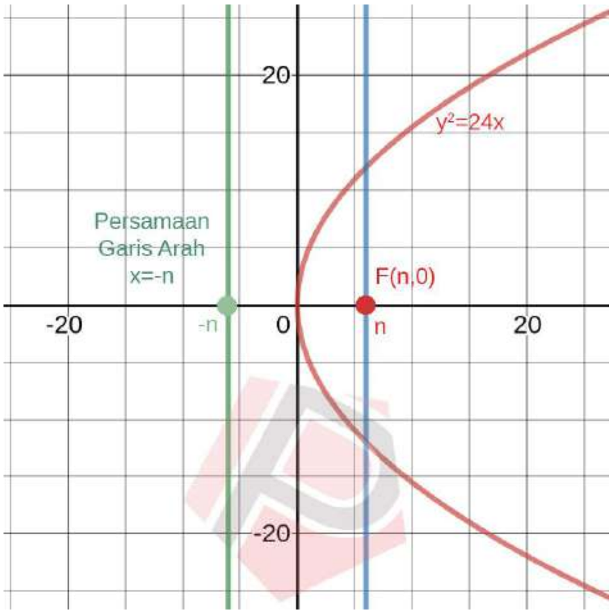
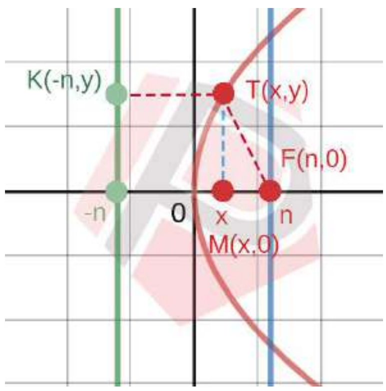
1. Tentukan titik api (titik fokus) dan persamaan garis arah parabola $y^2 = 24x$.
   Pembahasan :
   Jelas jika kita punya fungsi kuadrat $x = f(y) = ay^2 + by + c$ maka turunan pertama f terhadap y adalah $f'(y) = 2ay + b$ kemudian jika $f'(y) = 0$ kita peroleh titik stasioner (titik balik) yaitu $\left(f\left(\frac{-b}{2a}\right), \frac{-b}{2a}\right)$ dimana ordinat $y = \frac{-b}{2a}$ juga merupakan persamaan sumbu simetri pada grafik fungsi f.
   Jadi jika pada soal diketahui $y^2 = 24x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{24}$ maka jelas persamaan sumbu simetrinya adalah $y = \frac{-0}{2\left(\frac{1}{24}\right)}$ atau $y = 0$ (berhimpit dengan sumbu x) dan titik baliknya (titik pusat) $(0, 0)$.
   Karena sumbu simetrinya berhimpit sumbu x dan titik pusatnya (titik balik) adalah $(0, 0)$ maka dapat kita misalkan titik apinya $F(n, 0)$ sehingga persamaan garis arahnya $x = -n$ dengan n adalah bilangan real. Lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi berikut:



   Kita tahu bahwa definisi parabola adalah sautu tempat kedudukan titik-titik yang memiliki jarak yang sama pada suatu titik (titik api/fokus) serta suatu garis tertentu (garis arah / direktis). Sehingga untuk sembarang titik T(x, y) pada parabola berlaku :



Dapat kita tuliskan :

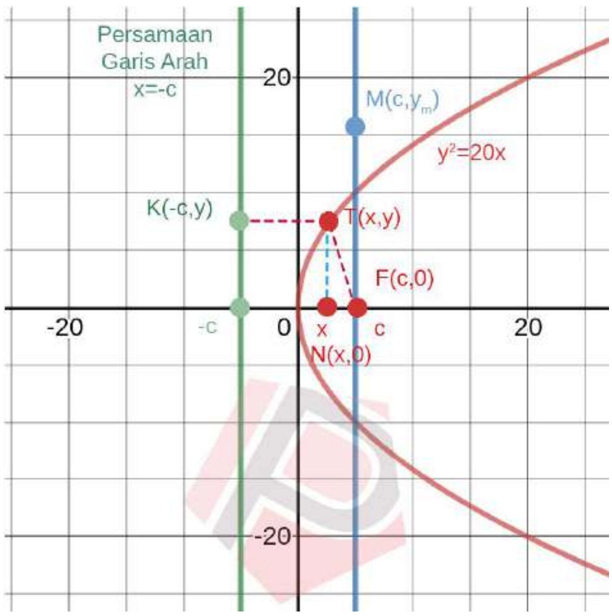
$$
\begin{aligned}
\mathrm{KT} = \mathrm{TF} \Leftrightarrow \mathrm{KT} &= \sqrt{\mathrm{TM}^2 + \mathrm{MF}^2} \\
\Leftrightarrow x + n &= \sqrt{y^2 + (n-x)^2} \\
\Leftrightarrow (x+n)^2 &= y^2 + (n-x)^2 \\
\Leftrightarrow y^2 &= (x+n)^2 - (n-x)^2 \\
\Leftrightarrow y^2 &= (x+n-(n-x))(x+n+(n-x)) \\
\Leftrightarrow y^2 &= (2x)(2n) = 4xn
\end{aligned}
$$

Dari persamaan terakhir di atas, jika kita substitusikan $y^2 = 24x$ kita peroleh $4xn = 24x$ atau $n = 6$. Jadi dapat disimpulkan bahwa dengan parabola $y^2 = 24x$ titik apinya adalah $F(n, 0) = (6, 0)$ dan persamaan garis arahnya adalah $x = -n = -6$.

2. Carilah persamaan garis yang menghubungkan titik M dan titik api parabola $y^2 = 20x$, jika absis titik M adalah F.

Pembahasan :

Berdasarkan soal sebelumnya kita dapatkan bahwa parabola $y^2 = 20x$ mempunyai titik pusat di $(0, 0)$ dan persamaan sumbu simetri $y = 0$ (berhimpit sumbu x). Kemudian pada soal diketahui basis titik $M(x_m, y_m)$ adalah F. Karena kurangnya informasi pada soal F disini kita asumsikan sebagai titik api atau titik fokus. Pada kalimat sebelumnya didapat parabola tersebut memiliki pusat $(0, 0)$ dan persamaan sumbu simetri $y = 0$ sehingga dapat kita misalkan $F(c, 0)$ dengan c suatu bilangan real dan kita punya $x_m = c$. Berikut ilustrasinya :



Dengan cara yang sama pada soal sebelumnya kita peroleh :

$$\begin{aligned}
\mathrm{KT} = \mathrm{TF} \Leftrightarrow \mathrm{KT} &= \sqrt{\mathrm{TN}^2 + \mathrm{NF}^2} \\
\Leftrightarrow x + c &= \sqrt{y^2 + (c-x)^2} \\
\Leftrightarrow (x+c)^2 &= y^2 + (c-x)^2 \\
\Leftrightarrow y^2 &= (x+c)^2 - (c-x)^2 \\
\Leftrightarrow y^2 &= (x + c - (c-x))(x + c + (c-x)) \\
\Leftrightarrow y^2 &= (2x)(2c) = 4xc
\end{aligned}$$

Kita substitusikan $y^2 = 20x$ dan didapat $4xc = 20x \Leftrightarrow c = 5$. Jadi karena $F(5,0)$ dan $M(5, y_m)$ maka jelas persamaan garis yang menghubungkan titik M dan titik api (F) adalah $x = 5$.

3. Dari titik $A(5,9)$ dibuat garis singgung pada parabola $y^2 = 5x$. Tentukan persamaan tali busur yang menghubungkan titik-titik singgungnya.
   Pembahasan :
   Pertama kita cek posisi titik $(5,9)$ dengan substitusi kita dapatkan $y^2 - 5x = 9^2 - 5(5) = 81 - 25 = 56 \geq 0$ (berada di luar kurva).
   Kemudian berdasarkan aturan *Joachimsthal* atau AMA (aturan membagi adil) pada persamaan parabola kita punya: $yy_1 = 5\left(\frac{x+x1}{2}\right)$ jika kita substitusikan $(x_1, y_1) = (5,9)$ kita akan mendapatkan persamaan garis kutub pada kurva tersebut. Dimana garis kutub tersebut mempunyai sifat menghubungkan titik-titik singgung yang diminta pada soal. Jadi persamaan tali busur yang dimaksud setara dengan persamaan garis kutub sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
yy_1 &= 5\left(\frac{x+x1}{2}\right) \\
\Leftrightarrow 9y &= 5\left(\frac{x+5}{2}\right) \\
\Leftrightarrow 18y &= 5x + 25 \quad \text{dan kita telah selesai}
\end{aligned}$$